

УДК 519.63: 621.372.8
doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое

Е. Ю. Смолькин¹, М. О. Снегур²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹e.g.smolkin@hotmail.com, ²snegur.max15@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – численное исследование ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном различными диэлектрическими материалами. *Материалы и методы.* Для получения численного решения задачи применяется метод пристрелки по параметру. *Результаты.* Численно найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны. *Выводы.* Указанный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн, ТЕ-волны, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, метод пристрелки

Финансирование: работа поддержана грантом Российского научного фонда № 20-11-20087.

Для цитирования: Смолькин Е. Ю., Снегур М. О. Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 1. С. 10–19. doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

Numerical investigation of the TE-polarized complex electromagnetic waves in an open nonhomogeneous layer

E.Yu. Smol'kin¹, M.O. Snegur²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹e.g.smolkin@hotmail.com, ²snegur.max15@gmail.com

Abstract. *Background.* The purpose of this work is to study numerically TE-polarized waves in a layer filled with various dielectric materials. *Material and methods.* In order to obtain a numerical solution to the problem, the parameter shooting method is used. *Results.* Complex and propagating leaky waves, complex and propagating surface waves were numerically found. *Conclusions.* The proposed numerical method is an effective way to find an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves.

Keywords: propagation of electromagnetic waves, TE-waves, Maxwell's equation, differential equations, shooting method

Acknowledgments: the work is supported by the Russian Science Foundation grant No. 20-11-20087.

For citation: Smol'kin E.Yu., Snegur M.O. Numerical investigation of the TE-polarized complex electromagnetic waves in an open nonhomogeneous layer. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021;1:10–19. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-1-2

© Смолькин Е. Ю., Снегур М. О., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

Анализ спектра вещественных и комплексных волн в открытых волноведущих структурах менее развит по сравнению с теорией экранированных волноводов, которая входит во многие учебники и монографии по электромагнетизму. Диэлектрический слой (ДС) является одной из наиболее хорошо изученных волноведущих структур в электродинамике [1–4]. Фактически диэлектрический слой является самым простым волноводом (с геометрической точки зрения), его дисперсионное уравнение можно записать в явном виде. Такая структура широко используется на практике (плоские оптические волноводы – линзы). Однако до сих пор нет точных доказательств наличия (или отсутствия) бесконечного числа вещественных или комплексных собственных волн, распространяющихся в ДС.

Актуальной задачей при изучении волноводов является классификация волн, существующих в структуре. В статье предложен численный метод расчета постоянных распространения ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом соответственно. Расчеты произведены на разных частотах. Таким образом, численно найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

В статьях [5, 6] выполнено численное исследование плоских диэлектрических и металл-диэлектрических волноводов. Численные результаты получены с помощью одного из вариантов метода пристрелки по параметру (см., например, [7, 8]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с декартовой системой координат $Oxyz$, заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\epsilon_c \epsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитную проницаемость $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h\}.$$

Граница $x = h$ – это проекция диэлектрической поверхности. Граница $x = 0$ – проекция идеально проводящего экрана.

Мы предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $\exp(i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Определение ТЕ-поляризованных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла, зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

с граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на идеально проводящем экране

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

и условием непрерывности тангенциальной составляющей электрического и магнитного поля на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости $x = h$:

$$[E_y]|_{x=h} = 0, \quad [H_z]|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где $[f]|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что мы хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Мы также предполагаем, что $\epsilon(x) > \epsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, т.е. $\epsilon(x) \in C[0, h]$ и $\text{Im} \epsilon(x) = 0$.

Задача о ТЕ-поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волноводной структуры.

Поле нормальной волны в волноводе можно представить с помощью одной скалярной функции:

$$u := E_y(x). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной составляющей электрического поля u .

Принята следующая классификация волн [1–4]:

- По параметру γ – постоянной распространения:

Определение 1. Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ .

Определение 2. Затухающая волна характеризуется чисто мнимым параметром γ .

Определение 3. Комплекс волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $\text{Re} \gamma \text{Im} \gamma \neq 0$.

- По условию на бесконечности:

Определение 4. Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$.

Определение 5. Вытекающая волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Постоянная распространения γ характеризует поведение волны (распространяющаяся, затухающая или комплексная) в z -направлении. Классификация волн поверхностных или вытекающих зависит от поведения в x -направлении.

Мы имеем следующую задачу на собственные значения для касательной компоненты электрического поля u : найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

и условиям сопряжения

$$[u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0. \quad (8)$$

При $x > h$ мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$; из (6) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (9)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = e^{(h-x)\lambda}, \quad x > h, \quad (10)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_c$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр. Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$, мы имеем поверхностную волну. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$, мы имеем вытекающую волну.

При $0 < x < h$ мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(x)$; тогда из (6) получаем уравнение

$$u'' + (\eta - \lambda^2) u = 0, \quad (11)$$

где

$$\eta(x; \omega) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon(x) - \varepsilon_c). \quad (12)$$

Определение 6. $\gamma \in \mathbb{R}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (11) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (10) при $x > h$, граничным условиям (7) и условиям сопряжения (8).

2. Численный метод

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' + (\eta - \lambda^2) u = 0 \quad (13)$$

с начальными условиями

$$u(0) := 0, u'(0) := A. \quad (14)$$

Мы предполагаем, что решение задачи Коши (13), (14) существует, единственно, глобально определено на отрезке $[0, h]$ при заданных значениях

$0, h$ и непрерывно зависит от параметра λ . Из условия сопряжения на второй границе h (8) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda u(h) + u'(h) = 0. \quad (15)$$

Из формулы (15) ясно, что значение $\Delta(\lambda)$ выражается через значения решения задачи Коши.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда, взяв вещественную и мнимую части от выражения (15), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей комплексной частоты λ :

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\lambda) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Чтобы определить пару α, β , мы будем численно решать систему уравнений (16). Решением каждого уравнения в (16) является кривая в плоскости $O\alpha\beta$. Помещая обе кривые на одной плоскости, мы определим точки пересечения кривых; эти точки являются решением исходной задачи (рис. 1).

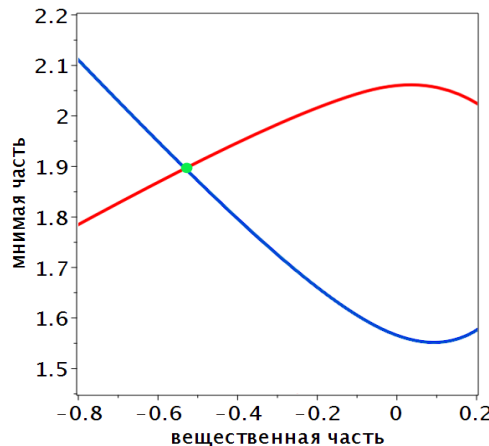


Рис. 1. Численное решение системы (16): синяя кривая – решение первого уравнения системы (16); красная кривая – решение второго уравнения системы (16); точка пересечения синей и красной кривых, обозначенная зеленым цветом, является решением системы (16)

Разбивая отрезки по α и β на более мелкие отрезки, мы определим сетку, состоящую из узлов $\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}$; эти узлы мы используем для метода пристрелки. Решая задачу Коши (13), (14) для каждого узла сетки, вычисляем величины $u(i, j)(h)$ и $u'(i, j)(h)$ для каждого узла. В силу непрерывной зависимости решения $u(h, \alpha, \beta)$ от параметров α и β существует точка $(\alpha^{(i)}, \hat{\beta}^{(j)})$ в плоскости $O\alpha\beta$ (где $\hat{\beta}^{(j)}$ лежит внутри интервала $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)})$), такая что $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$. Чем плотнее сетка, которую мы выбираем, тем более точное решение мы находим. Повторив эту процедуру для всей сетки, мы по-

лучим набор пар $\beta^{(p)}, \beta^{(q)}$, образующих кривую (синяя кривая рис. 1), приближенное решение уравнения $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$ в плоскости $O\alpha\beta$.

Применяя ту же процедуру к уравнению $\Delta_2(\alpha, \beta) = 0$, мы получаем еще одну кривую (красная кривая рис. 1) в плоскости $O\alpha\beta$, которая является приближенным решением указанного уравнения. Очевидно, точка пересечения (зеленая точка на рис. 1) расчетных кривых является приближенным решением задачи. Если сделать сетку более полной, то эти решения могут быть настолько точными, насколько это необходимо.

3. Численные результаты

На рис. 2–5 представлены результаты расчета постоянных распространения для задачи ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом соответственно. Расчеты произведены на разных частотах.

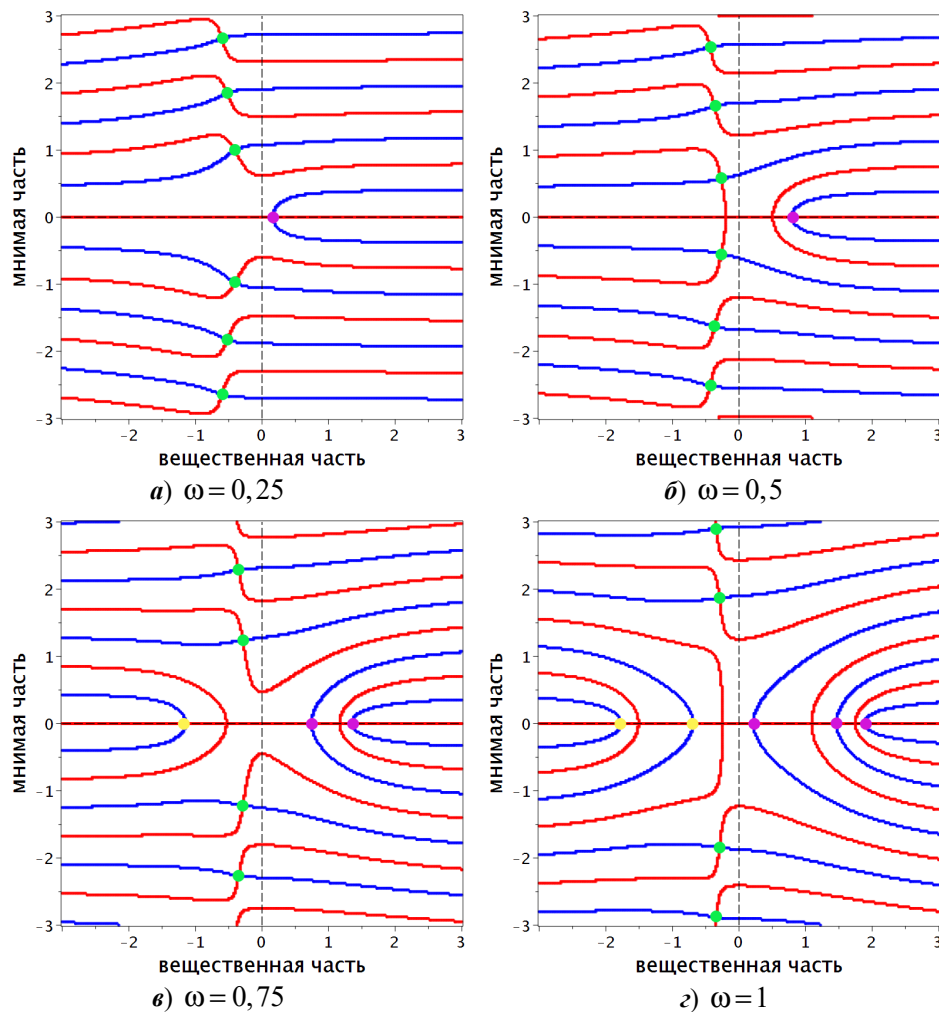


Рис. 2. Диэлектрический слой.

Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon = 5$, $\epsilon_c = 1$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4$

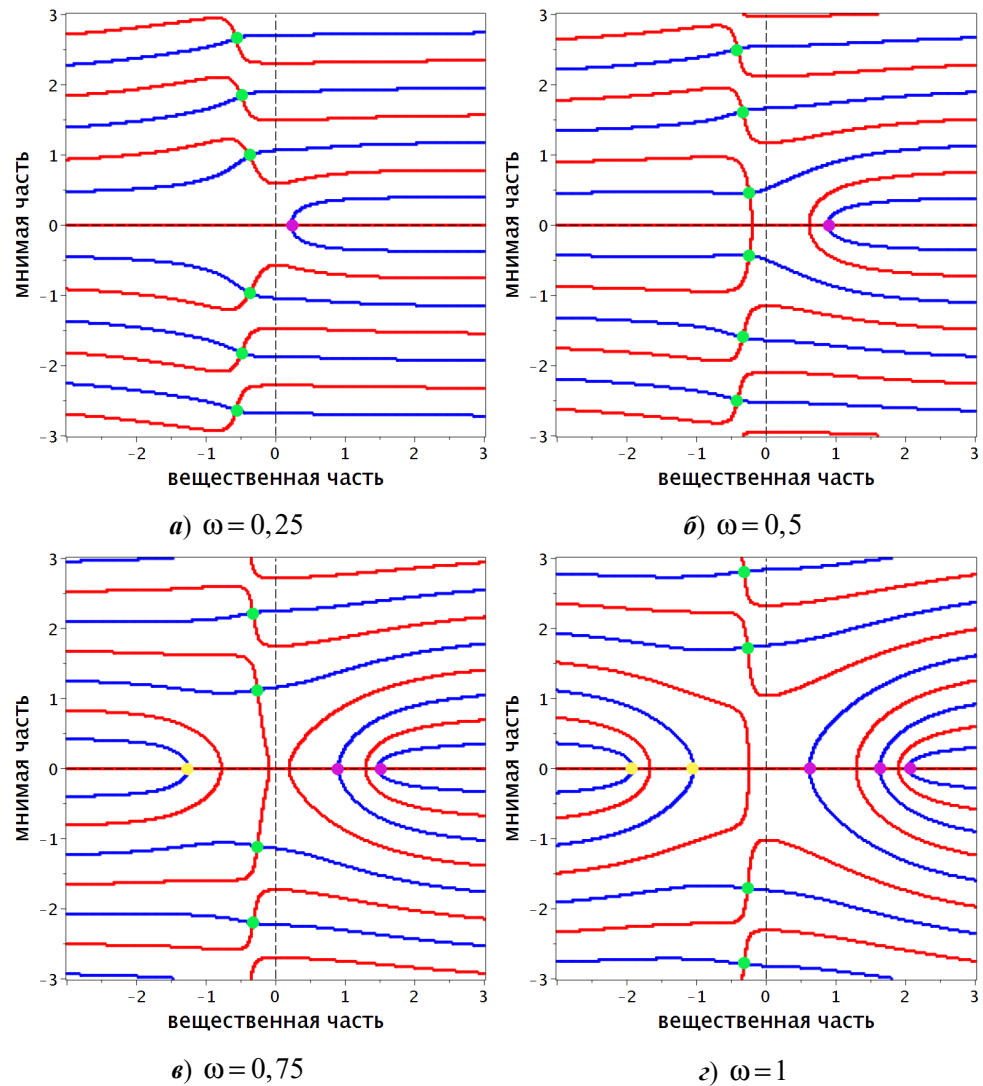


Рис. 3. Неоднородный диэлектрический слой.

Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon(x) = 5 + \frac{x}{h}$, $\epsilon_c = 1$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4 + \frac{x}{h}$

Приведено численное решение системы (16): синяя кривая – решение первого уравнения системы (16); красная кривая – решение второго уравнения системы (16); точка пересечения синей и красной кривых является решением системы (16); т.е. найдены комплексные (зеленые точки) и распространяющиеся (желтые точки) вытекающие волны, распространяющиеся поверхностные (фиолетовые точки) волны (рис. 2); комплексные (зеленые точки) и распространяющиеся (желтые точки) вытекающие волны, распространяющиеся поверхностные (фиолетовые точки) волны (рис. 3); комплексные (зеленые точки) вытекающие и комплексные поверхностные (розовые точки) волны (рис. 4); комплексные (зеленые точки) вытекающие волны (рис. 5).

Таким образом найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные волны.

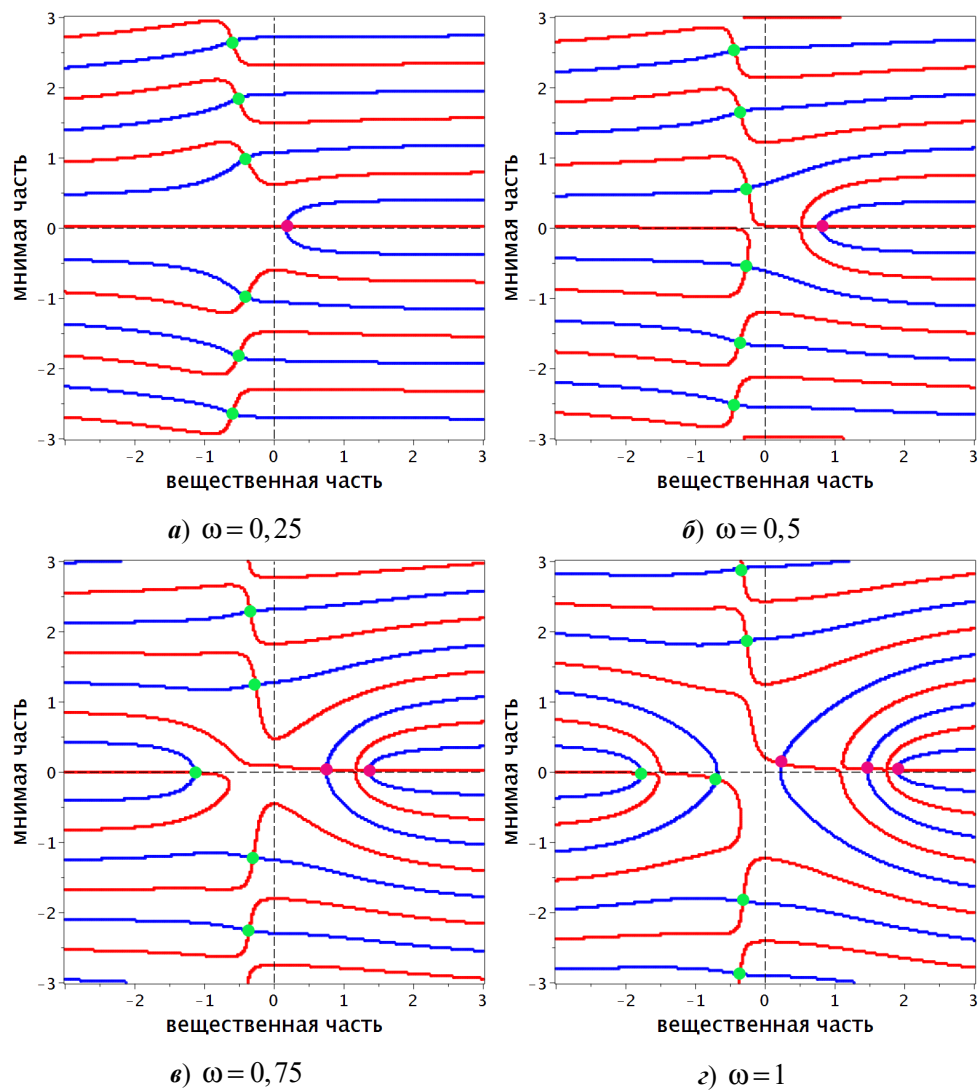


Рис. 4. Диэлектрический слой с поглощением.

Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon = 5 + 0,1\omega i$, $\epsilon_c = 1$, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = 4 + 0,1\omega i$

Закключение

В статье предложен и реализован численный метод для решения задачи определения постоянных распространения (и затухания) для ТЕ-поляризованных волн в открытом слое, заполненном неоднородным материалом.

Рассмотрены случаи заполнения слоя однородным диэлектриком, неоднородным диэлектриком, диэлектриком с поглощением и метаматериалом.

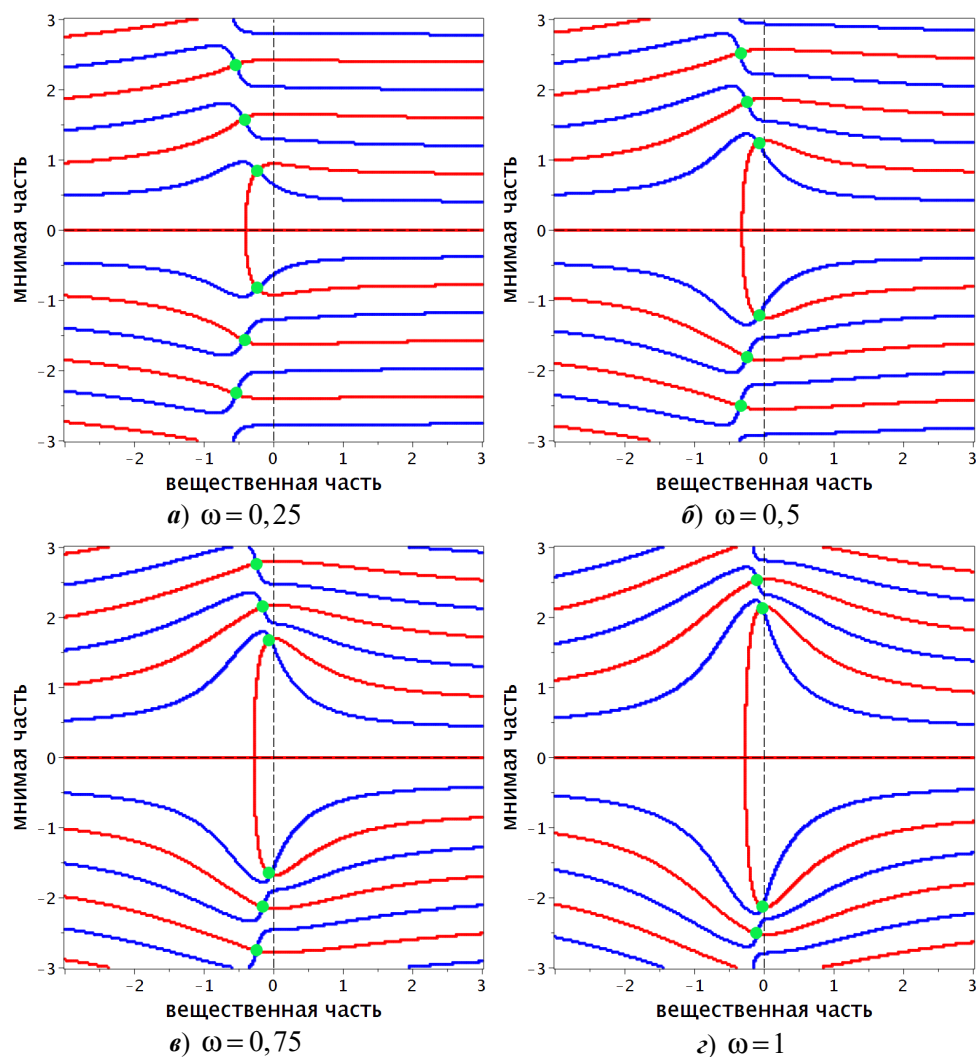


Рис. 5. Метаматериальный слой.
Значения параметров: $h = 4$, $\varepsilon = -3$, $\varepsilon_c = 1$, $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\eta = -4$

Список литературы

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984. 512 с.
2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М. : Радио и связь, 1987.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1987. 655 с.
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М. : Мир, 1974. 576 с.
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. P. 1396–1403.
6. Smirnov Y. G., Smolkin E. Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer // Doklady Mathematics. 2020. Vol. 101. P. 53–56.
7. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures // Mathematical Modelling and Analysis. 2017. Vol. 22. P. 271–282.
8. Smolkin E., Valovik D. Nonlinear propagation of coupled electromagnetic waves in a circular cylindrical waveguide // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. P. 1294–1309.

References

1. Adams M. *Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov = Introduction to the theory of optical waveguides*. Moscow: Mir, 1984:512. (In Russ.)
2. Snayder A., Lav Dzh. *Teoriya opticheskikh volnovodov = Optical waveguide theory*. Moscow: Radio i svyaz', 1987. (In Russ.)
3. Vaynshteyn L.A. *Elektromagnitnye volny = Electromagnetic waves*. Moscow: Radio i svyaz', 1987:655. (In Russ.)
4. Markuze D. *Opticheskie volnovody = Optical waveguides*. Moscow: Mir, 1974:576. (In Russ.)
5. Smirnov Y., Smolkin E. Complex Waves in Dielectric Layer. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41:1396–1403.
6. Smirnov Y.G., Smolkin E.Y. On the Existence of an Infinite Number of Leaky Complex Waves in a Dielectric Layer. *Doklady Mathematics*. 2020;101:53–56.
7. Smolkin E. Numerical Method for Electromagnetic Wave Propagation Problem in a Cylindrical Inhomogeneous Metal Dielectric Waveguiding Structures. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2017;22:271–282.
8. Smolkin E., Valovik D. Nonlinear propagation of coupled electromagnetic waves in a circular cylindrical waveguide. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57:1294–1309.

Информация об авторах / Information about the authors

Евгений Юрьевич Смолькин

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Evgeniy Yu. Smol'kin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics and
supercomputer modeling, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Максим Олегович Снегур

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

Maksim O. Snegur

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Поступила в редакцию / Received 08.12.2020

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.12.2020

Принята к публикации / Accepted 29.12.2020